

用单摆法测量重力加速度及修正公式分析

张斯羽, 马宁生, 钟文心

上海杉达学院, 上海 201209

摘要: 本文通过大学物理实验中的经典实验项目“用单摆法测量重力加速度”来测量上海本地的重力加速度 g , 并探讨小摆角近似条件下修正公式的适用性。实验首先使用固定摆长和改变摆长两种方法测量小角度的摆动的 g , 然后使用固定摆长进行大角度摆动 ($>5^\circ$) 的 g 测量, 并对大角度摆动的修正公式在不同摆角下的测量结果进行数值上的验证。实验结果表明, 小角度条件下单摆法测得重力加速度 g 的误差较小; 在大摆角情况下, 摆动周期的修正公式有效降低摆动周期的相对误差, 并使 g 更加接近理论值。

关键词: 单摆法、大摆角、修正公式、误差分析

Measuring Gravitational Acceleration Using a Pendulum and Correcting Formula Analysis

Zhang Siyu, Ma Ningsheng, Zhong Wenxin

School of Information Science and Technology, Shanghai Sanda University, Shanghai 201209, China

Abstract: This article measures the local gravity acceleration g in Shanghai using the classic experimental project "Measuring Gravity Acceleration with a Single Pendulum Method" in university physics experiments, and explores the applicability of the correction formula under small pendulum angle approximation conditions. The experiment first used two methods, fixed pendulum length and changing pendulum length, to measure the g of small angle swing. Then, fixed pendulum length was used to measure the g of large angle swing ($>5^\circ$), and the correction formula for large angle swing was numerically validated at different swing angles. The experimental results indicate that the error in measuring the gravitational acceleration g using the pendulum method under small angle conditions is relatively small; In the case of large swing angles, the correction formula for the swing period effectively reduces the relative error of the swing period and makes g closer to the theoretical value.

Keywords: single pendulum method, large swing angle, correction formula, error analysis

1. 引言

地球表面附近的重力加速度是一个重要的物理学参量, 通常用 g 值来表示, 其大小是地球与地表附近物体相互作用的综合反映^[1]。重力加速度受纬度、海拔、地质构造等多种因素的影响, 因此地球表面不同地区的 g 值略有不同。一般而言, 赤道附近的 g 值略小于两极附近; 在纬度相同的地区, 海拔越高, g 值则越小^[2]。而在地球内部结构中, 物质运移和构造变形也会对地表的重力加速度有微小的影响^[3]。因此, 对于抗震防灾、地质勘探、地球动力学等实用和研究领域来说, 对地球重力加速度分布进行高精度测量具有重要意义。早期的重

力加速度测量方法比较简单, 而随着原子技术的发展, 原子重力仪等新型重力观测设备开始了广泛的研发与投入使用, 大大提高了重力加速度的观测效率和精度^[4,5]。如 2002 年, 美国耶鲁大学的 Kasevich 小组利用原子干涉仪进行测量, 得到了较高的 g 值梯度的精度 ($40\text{E}, 1\text{E} = 10^{-9}/\text{s}^2$)^[6,7]。我国从 1980 年代开始使用绝对重力仪器进行重力观测, 并通过数十年的时间逐步构建了覆盖全国且均匀分布的高精度绝对重力网络^[5], 广泛应用于地震监测预报、地壳构造变形、地表物质迁移等前沿领域。

第一作者: 张斯羽, 上海杉达学院, 学生 Email: zhangsiyu0066@gmail.com

通讯作者: 马宁生, 上海杉达学院, 教授 Email: maningsheng2005@163.com

钟文心, 上海杉达学院, 讲师, Email: wxzhong@sandau.edu.cn

然而在常规生产技术条件下,对 g 值的测量并不需要特别高的精度,可以使用单摆测量法、自由落体运动法(落球法)、倾斜气垫导轨法、平衡法等经典力学的常用实验手段来进行测量^[3]。其中单摆法是一种经典而简便的 g 值测量方法,但其理论模型严格依赖小角度近似条件。对于大摆角的情况,需要使用修正公式来修正摆动周期,从而提高 g 值的计算精度,减少误差。

本文的研究结构如下:首先,简要回顾了经典

2. 实验原理

用长为 l 的不可伸长轻线悬挂一个金属小球,金属小球质量为 m ,如图 1 所示。如果细线的质量比金属小球的质量小很多,而金属小球的直径又比细线的长度小很多,即可将金属小球视作质点,这种装置称为单摆。该质点受重力与悬线拉力的合力作用,质点在竖直面内沿圆弧进行周期性摆动,且摆动中相对于悬线竖直位置的角位移 θ 很小(要求摆角 $<5^\circ$)。现在分析质点沿运动方向的力 F_t 的大小为:

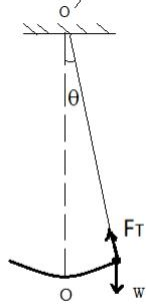


图1 单摆

$$mg|\sin\theta| \quad (1)$$

且总指向 $\theta=0$ 的平衡位置,由于 $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} +$

$\frac{\theta^5}{5!} - \dots$, 当角位移 θ 很小时,略去级数展开式中的高

次项, $\sin\theta \approx \theta$, 切向力可写作 $F_t = -mg\theta$, 切向力与角位移方向相反,促使质点返回平衡位置, F_t 是线性恢复力,根据第二定律,可以得出单摆的动力学方程:

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \quad (2)$$

(2)式中 g 为重力加速度, θ 为任意时刻 t 的单摆摆角。化简可得:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (3)$$

令圆频率为 $\omega^2 = \frac{g}{l}$, 代入(3)式化简得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (4)$$

力学中单摆法(摆角 $\leq 5^\circ$) 测量重力加速度 g 的实验原理,并基于所设计的测量计算方法,求解出上海地区的重力加速度 g 值。其次,针对大摆角情况,通过多次测量单摆的摆动周期,并运用大摆角周期修正公式对不同摆角下的周期进行修正,进而计算出修正后的 g 值。最后,对不同摆角下的 g 值修正前后的误差进行了详细分析,并探讨了大摆角周期修正公式的适用角度范围。

由(4)式可得 $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$, 即单摆作简谐振动。进一步计算可得关于 ω, T, g 的公式:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (7)$$

单摆往返摆动一次所需要的时间称作单摆的周期,即小角度情况下的理论周期,用 T 表示,单位为 s ; ω_0 即为单摆做简谐运动的圆频率,单位为 rad/s ; l 为单摆的摆长(摆线长度加金属小球半径),单位为 m ; g 为实验所求得的当地重力加速度,单位为 m/s^2 。因此,通过精确测量单摆的摆长 l 和周期 T ,可以利用单摆的运动方程计算出重力加速度 g 。

3. 在小角度下求重力加速度 g

本实验在小摆角($<5^\circ$)条件下,采用两种方法对重力加速度 g 进行测量。第一种方法为常规的固定摆长法,通过测量单摆的平均周期来计算 g ;第二种方法是本实验所设计的,通过测量不同摆长下的摆长-周期关系来求解 g 。以下将分别对这两种方法进行详细介绍。

3.1 固定摆长测量重力加速度 g

固定摆长长度 $l \approx 100 \text{ cm}$, 然后利用单摆实验仪(DH4605SP型)和半径为 1 cm 的小球,测得 30 个周期($30T$)的数据,进而求得平均周期 T , 实

验数据如表 1 所示，最后代入（7）式求得 $g=9.81\pm0.05\text{ m/s}^2$ 。

表 1：摆长为 100cm 的周期 T

次数	1	2	3	平均
30T/s	60.189	60.174	60.177	60.18
T/s	2.006	2.006	2.006	2.006

3.2 不同摆长测量重力加速度 g

测量在不同摆长（50, 60, 70, 80, 90, 100cm）下的 $30T$ 、 $(30T)^2$ ，实验数据如表 2 所示，然后作关于 $l\sim(30T)^2$ 的关系图（如图 2 所示），接着利用（7）式进行等值换算：

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = \frac{4\pi^2}{(30T/30)^2} = \frac{3600\pi^2}{(30T)^2}$$

可得：
$$l = \frac{g}{3600\pi^2} (30T)^2 \quad (8)$$

由（8）式知 l 与 $(30T)^2$ 呈线性关系，将在图 2 的数据点形成的趋势直线上取两点，求两点的斜率 K ，代入由（8）式得出的斜率表达式 K ：

$$K = \frac{g}{3600\pi^2} \quad (9)$$

最后由（9）式可推出：

$$g = 3600\pi^2 K \quad (10)$$

计算可得： $g=9.79\pm0.03\text{ m/s}^2$

表 2：不同摆长下的 $30T$ 、 $(30T)^2$

l(cm)	50	60	70	80	90	100
30T/s	42.858	47.123	50.255	53.720	57.102	60.430
$(30T)^2$	1836.8	2220.6	2525.6	2885.8	3260.6	3651.8

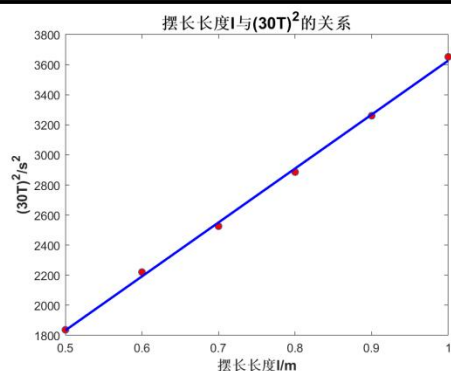


图 2：摆长长度 l 与 $(30T)^2$ 的关系，x 轴为摆长长度 l ，y 轴为 $(30T)^2$ 。

通过对两种小摆角测量方法的结果分析，可以发现，与传统的固定摆长测量周期的方法相比，本

实验设计的第二种测量法——基于不同摆长与周期关系的测量方法，具有更高的测量精度。

4. 在大角度下求重力加速度 g

4.1 修正大角度下的数据偏差

如前所述，单摆周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 基于小角

度近似条件 $\sin\theta \approx \theta$ 推导得出 $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ ，仅适用

于初始摆角 θ 较小时（ $\theta \leq 5^\circ$ ）的情况。随着 θ 的增大，摆角对运动周期的影响不能忽略。如图 3，4 所示，在 θ 越来越大的情况下， $\sin\theta$ 与 θ 弧度值的偏差将越来越大， $mg\sin\theta \approx mg\theta$ 的关系不再适用，故计算 g 值大小时会有较大误差。因此，通过引入修正公式对周期 T 进行修正，可以有效减小因摆角增大而导致的 g 值误差。

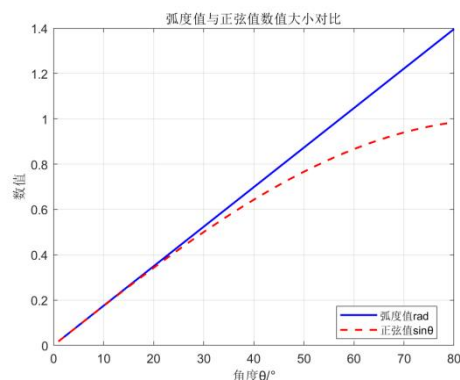


图 3：弧度值与正弦值数值大小对比，x 轴为角度 θ ，y 轴为数值，蓝色曲线表示为角度的弧度值，红色曲线表示为正弦值 $\sin\theta$ 。

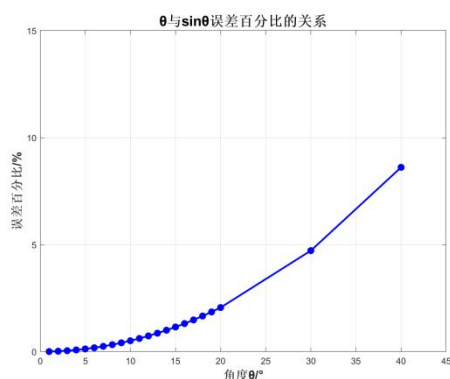


图 4： θ 与 $\sin\theta$ 误差百分比的关系，x 轴为 θ ，y 轴为 θ 与 $\sin\theta$ 的误差百分比值，蓝色曲线代表 θ 与 $\sin\theta$ 相较于 $\sin\theta$ 的误差百分比。

4.2 大角度下的公式修正

当单摆从平衡位置移起一个特定角度 θ_0 ，并且受重力作用在竖直平面内开始作自由摆动，其运动满足微分方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (11)$$

从微分方程解得摆动周期 $T_{\text{摆}}$ 与最大角度 θ_0 满足以下关系^[8]：

$$T_{\text{摆}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots + \left[\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \right]^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right\} \quad (12)$$

上式的二级近似式则满足：

$$T_{\text{修}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) = T \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (13)$$

在(13)式中： $T_{\text{摆}}$ 为从(11)式推出的理论周期；

$T_{\text{修}}$ 为做了二级近似修正后的周期； T 为小角度情况下从(6)式得出的理论周期， θ_0 为初始摆角。

该修正公式通过引入非线性项来描述摆角对单摆周期 T 的影响，从而在较大摆角范围内保持了一定的精度。这种修正方法能够更准确地反映单摆运动在大摆角下的非线性特性，显示其周期会随着摆角的增加而显著变化。因此，基于修正公式的重力加速度 g 的计算结果更加接近真实值。

4.3 测量与数据处理

尽管修正公式在一定程度上能够通过引入非线性项来提高单摆周期的计算精度，但其精度仍需在不同摆角下通过实验进行数值上的验证。接下来介绍在不同摆角下（ $\theta \geq 5^\circ$ ）的周期经过修正后的误差测量。

首先测量不同初始摆角 θ （如 $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ ）下的五个周期 $5T_{\text{实测}}$ ，使用(6)式计算得出理论周期 T ，因为超出小角度范围，故需要利用修正公式对 T 进行修正，然后将每个 θ 对应的理论周期代入修正公式(13)式，计算修正后的周期 $T_{\text{修}}$ ，最

后根据(14)式与(15)式分别计算 T 与 $T_{\text{修}}$ 相对于实测周期 $T_{\text{实测}}$ 的相对误差。

$$\varepsilon_{\text{理论}} = \frac{|T - T_{\text{实测}}|}{T_{\text{实测}}} \times 100\% \quad (14)$$

$$\varepsilon_{\text{修正}} = \frac{|T_{\text{修}} - T_{\text{实测}}|}{T_{\text{实测}}} \times 100\% \quad (15)$$

4.4 数据分析

表 3：不同初始摆角 θ 的 $5T_{\text{实测}}$

θ	5	10	15	20
$5T_1/s$	10.065	10.093	10.115	10.156
$5T_2/s$	10.062	10.091	10.108	10.139
$5T_3/s$	10.061	10.091	10.105	10.124
$T_{\text{平均}}/s$	2.0125	2.0184	2.0219	2.0279
$T^2(s^2)$	4.0502	4.0723	4.0881	4.1124

表 4： g 值在周期修正前后的相对误差为 1%、2%、3%的相关数据

误差 (%)	E	$\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\sin \frac{\theta}{2}$	$\sin \theta$
1%	1.01	0.00499	0.14125	0.28
2%	1.02	0.00995	0.3980	0.40
3%	1.03	0.01489	0.05956	0.49

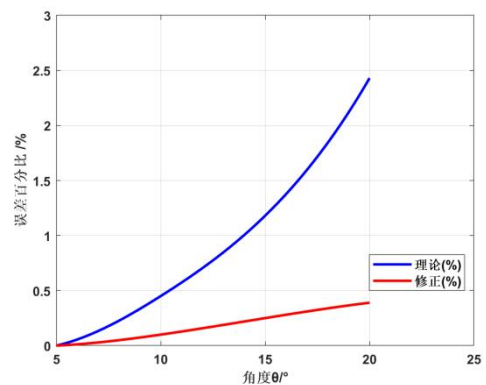


图 5： $\varepsilon_{\text{理论}}$ 与 $\varepsilon_{\text{修正}}$ 的曲线图，x 为角度 θ ，y 轴为 θ 与 $\sin\theta$ 的误差百分比值，蓝色曲线代表未修正周

期的相对误差, 橙色曲线代表修正后的周期相对误差。

角度为小摆角 ($\theta \leq 5^\circ$) 下, 理论周期 T 与实测周期 $T_{\text{实测}}$ 误差极小, 无需修正。随着摆角增大 (如 $\theta \geq 5^\circ$) , 小摆角下的理论周期 T 明显低于实测周期 $T_{\text{实测}}$, 而修正后的周期 $T_{\text{修正}}$ 与 $T_{\text{实测}}$ 更加

接近。对比 $\varepsilon_{\text{理论}}$ 与 $\varepsilon_{\text{修正}}$ (如图 5) , 理论公式的相对误差从 0.05% 增加到 2.43% , 而修正公式的相对误差从 0.00% 增加到 0.39%。修正公式有效减小了摆角增大时的周期误差, 特别是在 $\theta=15^\circ$ 和 $\theta=20^\circ$ 时, 修正后的周期误差降低了约 80%。

当摆角 $\theta \leq 5^\circ$ 时, 近似时角度误差在 0.13% 以内。当摆角 $5^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ 时, 近似时角度误差在 0.13%~0.51% 之间。当摆角 $10^\circ \leq \theta \leq 20^\circ$ 时, 近似时角度误差在 0.51%~2.06% 之间。当摆角 $20^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ 时, 近似时角度误差在 2.06%~8.61% 之间。当摆角 $\theta > 40^\circ$ 时, 近似角度误差超过 8.61%。当摆角 $\theta \leq 5^\circ$ 时, 修正公式与理论公式结果几乎一致。当摆角 $\theta \in [5^\circ, 24^\circ]$, 修正公式显著提高了周期计算的精度。当摆角 $\theta > 24^\circ$ 时, 修正公式仍存在一定误差, 但大幅优于未修正公式。

对于修正前后的重力加速度 g 值而言, 如表 4 所示, 当允许修正前的 g 与修正后的重力加速度 $g_{\text{修}}$

的误差值为 1% 时, 根据 $\frac{g_{\text{修}} - g}{g} < 1\%$, 可得

$\frac{g(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2})^2 - g}{g} < 1\%$, 化简可得 $\theta < 17^\circ$ 。类似, 当误差值为 2% (3%) 时, 可得 $\theta < 20^\circ$ ($\theta < 24^\circ$)。

5. 讨论与分析

上述测量结果表明, 当摆角较大时, 实际周期将偏离 (6) 式的理论值, 因此需引入修正公式以提高精度。经过修正后, 摆动周期的相对误差显著降低, 在 20° 左右仍有较小的相对误差 (如图 5 所示)。

其次, 修正前的 g 与修正后的重力加速度 $g_{\text{修}}$ 在 $\theta \leq 24^\circ$ 范围内适用 (假如允许误差在 3% 以内), 超出范围后误差随 θ 增大而显著增大。

另外, 在实验过程中除了存在摆角角度带来的误差, 还有可能存在摆长测量误差、时间测量误差、空气浮力误差、阻尼误差、摆动幅度误差以及人为误差等等, 主要来源于米尺刻度的读数, 在实验时空气密度对摆球物质密度、体积的影响, 单摆摆动时存在因空气的粘滞力及其他因素引起的阻力等等。

6. 结语

本实验利用单摆实验仪对不同摆角下的摆动周期和重力加速度 g 进行了不同方式的测量。在小摆角 ($\theta \leq 5^\circ$) 的情况下, 本实验测得上海地区的重力加速度 $g = 9.79 \pm 0.03 \text{ m/s}^2$, 与理论值相符。而在大摆角 ($\theta > 5^\circ$) 情况下, 本实验在不同摆角的数值上验证了周期修正公式在一定摆角范围内的有效性和适用性。

实验结果表明, 单摆法是一种简便且精确的测量 g 的方法, 对于 $\theta \leq 5^\circ$ 的小摆角实验, 可直接使用理论公式; 对于 $\theta > 5^\circ$ 的大摆角实验, 周期修正公式必不可少, 可使得 $\theta \leq 24^\circ$ 时的相对误差低于 0.5%。对于修正前后的重力加速度 g 而言, 在 $\theta \leq 24^\circ$ 范围内相对误差则在 3% 以内。以上结果说明周期修正公式能够有效减小摆角增大对周期计算的影响。

综上所述, 在实际实验操作过程中, 应优先保持摆角 $\theta \leq 5^\circ$, 以减少复杂修正的必要性; 若不可避免地使用大摆角, 则需严格依赖修正公式进行周期计算。

参考文献

- [1] 曾铁. 两个力学问题的探讨[J]. 物理教师, 2008, (07): 19-20.
- [2] Dikpati M, Gilman P A. Analysis of Hydrodynamic Stability of Solar Tachocline Latitudinal Differential Rotation using a Shallow-Water Model[J]. The Astrophysical Journal, 2001, 551(1): 536.
- [3] Kenkmann T, Poelchau M H, Wulf G. Structural geology of impact craters[J]. Journal of Structural Geology, 2014, 62: 156-182.
- [4] 王嘉沛, 韩宇飞, 张新林, 等. 我国绝对重力观测应用与研究进展[J]. 地球与行星物理论评 (中英文), 2024.
- [5] 胡飞, 黄邦蓉. 对重力加速度几种测量方法的

比较研究 [J]. 物理通报 ,2016(10):93-100.

DOI:10.3969/j.issn.0509-4038.2016.10.029.

[6] 董光兴, 王新兴, 张鹏, 等.重力加速度的测量方法与实验分析.河西学院学报,2015,31(5):31-36

[7] McGuirk J.M.,Foster G.T.,Fixler J.B.,et al.

Sensitive absolute - gravity gradiometry using atom-interferometry .Phys.Rev.A,2002,65(3):033608 - 15

[8] 唐贵平,李西南,何兴. 单摆实验法测重力加速度的修正[J].中国教育技术装备,2002(8):21-22.